

LBRIS

We know
books

Dan ZAHARIA
Maria ZAHARIA

matematică **algebră** **geometrie**

clasa a VI-a

partea I

ediția a XIII-a, revizuită



mate 2000 – consolidare

Recapitulare și evaluare inițială

1. Exerciții și probleme recapitulative.....	5
2. Recapitulare și sistematizare prin teste	8
Test de autoevaluare	11

ALGEBRĂ

Capitolul: Mulțimi. Mulțimea numerelor naturale

Unitatea: Mulțimi

1. Mulțimi: descriere, notații, reprezentări. Relația dintre un element și o mulțime. Mulțimi numerice și mulțimi nenumerice	15
2. Relații între mulțimi. Submulțimi	18
3. Mulțimi finite. Mulțimi infinite.....	20
4. Operații cu mulțimi: reuniune, intersecție, diferență.....	22
5. Recapitulare și sistematizare prin teste	28
Test de autoevaluare	31

Unitatea: Divizibilitatea numerelor naturale

1. Divizibilitatea numerelor naturale. Descompunerea numerelor naturale în produs de puteri de numere prime.....	34
2. Determinarea celui mai mare divizor comun a două sau mai multor numere naturale. Numere prime între ele.....	40
3. Determinarea celui mai mic multiplu comun a două sau mai multor numere naturale.....	43
4. Proprietăți ale divizibilității în mulțimea numerelor naturale	46
5. Probleme care se rezolvă folosind divizibilitatea	50
6. Probleme de matematică aplicată în viața cotidiană.....	53
7. Recapitulare și sistematizare prin teste	54
Test de autoevaluare	57

Capitolul: Rapoarte și proporții

Unitatea: Rapoarte și proporții

1. Rapoarte	62
2. Procente.....	68
3. Proporții.....	72
4. Probleme de matematică aplicată în viața cotidiană.....	79
5. Recapitulare și sistematizare prin teste	81
Test de autoevaluare	85

Unitatea: Proporționalitate și elemente de organizare a datelor

1. Mărimi direct proporționale	88
2. Mărimi invers proporționale.....	92
3. Regula de trei simplă.....	96
4. Elemente de organizare a datelor	100
5. Probabilități (Aplicație la rapoarte).....	110
6. Probleme de matematică aplicată în viața cotidiană.....	114

7. Recapitulare și sistematizare prin teste.....	115
<i>Test de autoevaluare</i>	119
AUTOEVALUARE	122

GEOMETRIE

Capitolul; Noțiuni geometrice fundamentale

Unitatea: Unghiul

1. Recapitulare și completări.....	125
2. Unghiuri opuse la vârf. Congruența unghiurilor opuse la vârf.....	129
3. Unghiuri formate în jurul unui punct. Suma măsurilor unghiurilor în jurul unui punct.....	132
4. Unghiuri suplimentare. Unghiuri complementare	135
5. Unghiuri adiacente. Bisectoarea unui unghi. Construcția bisectoarei unui unghi	138
6. Recapitulare și sistematizare prin teste	142
<i>Test de autoevaluare</i>	145

Unitatea: Paralelism

1. Drepte paralele: definiție, notație, construcție intuitivă prin translație. Axioma paralelelor.....	148
2. Criterii de paralelism. Unghiuri formate de două drepte paralele cu o secantă.....	151
3. Aplicații practice în poligoane și corpuri geometrice.....	157
4. Recapitulare și sistematizare prin teste	162
<i>Test de autoevaluare</i>	165

Unitatea: Perpendicularitate

1. Drepte perpendiculare în plan (definiție, notație, construcție). Oblice.....	168
2. Aplicații practice în poligoane și corpuri geometrice.....	172
3. Distanța de la un punct la o dreaptă	174
4. Mediatoarea unui segment. Construcția mediatoarei unui segment. Simetria față de o dreaptă	176
5. Recapitulare și sistematizare prin teste	181
<i>Test de autoevaluare</i>	185

Unitatea: Cercul

1. Cerc. Elemente în cerc: centru, coardă, diametru, arc de cerc.....	188
2. Unghi la centru. Măsuri.....	191
3. Pozițiile relative ale unei drepte față de un cerc. Pozițiile relative a două cercuri ...	193
4. Recapitulare și sistematizare prin teste	196
<i>Test de autoevaluare</i>	199

AUTOEVALUARE	202
---------------------------	-----

Teste recapitulative	203
-----------------------------------	-----

Probleme date la concursuri școlare	219
--	-----

INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI	221
--------------------------------------	-----

PP Competențe generale (conform programei clasei a V-a)

1. Identificarea unor date, mărimi și relații matematice, în contextul în care acestea apar
2. Prelucrarea unor date matematice de tip cantitativ, calitativ, structural, cuprinse în diverse surse informaționale
3. Utilizarea conceptelor și a algoritmilor specifici în diverse contexte matematice
4. Exprimarea în limbajul specific matematicii a informațiilor, a concluziilor și a demersurilor de rezolvare pentru o situație dată
5. Analizarea caracteristicilor matematice ale unei situații date
6. Modelarea matematică a unei situații date, prin integrarea achizițiilor din diferite domenii

PE 1. Exerciții și probleme recapitulative

1. Calculați:
 - a) $(3^{102} : 3^{72} + 2^2 \cdot 2^{25} - 2025^0) : (27^{10} + 8^9 - 18^2 : 324)$;
 - b) $(2 + 2 \cdot 3) \cdot \{2 \cdot 2^3 \cdot 2^{42} - 2^{46} + [3^{150} : 3^{45} - (3^7)^{15}] + 16\}$;
 - c) $1^{2025} - 2025^0 + 3^2 - 2^3 + 2026^1 - 2025^1 + 0^{2030}$;
 - d) $[(2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6) : (2^0 + 2^2 + 2^4 + 3^2)] \cdot (1 + 3 + 3^2 + 3^3)$.
2. Verificați dacă următoarele numere sunt pătrate perfecte, știind că n este număr natural:
 - a) $x = 2 + 4 + 6 + \dots + 2n$;
 - b) $y = 1 + 3 + 5 + \dots + 2n - 1$;
 - c) $z = 100 + 2 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + 99)$;
 - d) $t = 2025 + 2 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + 2024)$.
3. Calculați ultima cifră a numărului:
 - a) $x = 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2025 + 5^{2026}$;
 - b) $y = 2^{2027} + 3^{2028} + 5^{2029} + 6^{2030}$;
 - c) $z = 2025^{2033} + 2026^{2033} + 2027^{2033} + 2028^{2033}$;
 - d) $t = 1 + 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2030}$.
4. a) Transformați fracțiile ordinare $\frac{17}{4}$, $\frac{11}{3}$, $\frac{43}{15}$ și $\frac{71}{330}$ în fracții zecimale.
 b) Transformați fracțiile zecimale 1,9(3), 3,08(3), 5,28 și 0,1(23) în fracții ordinare ireductibile.
5. a) Aflați numerele care împărțite la 5 dau câtul cu o unitate mai mare decât restul.
 b) Calculați câtul și restul împărțirii numărului de forma $\overline{abab}$ la $\overline{ab}$.
 c) Arătați că nu există numere naturale care împărțite la 12 să dea restul 4 și împărțite la 18 să dea restul 8.
 d) Calculați restul împărțirii numărului $70a + 37$ la 7, la 10 și la 14.
6. a) Efectuați calculele:

a) $1\frac{3}{4} + 2\frac{1}{2} : 2$;	b) $5,4 - 1\frac{8}{25} \cdot 3, (3)$;	c) $(0,5)^2 + 0,(6) - 0,1(6)$;
d) $1,41 \cdot 10^2 : 0,3$;	e) $1,1^2 + 0,9^2 : 0,3^3$;	f) $1,21 \cdot (2,3 - 1,2) : 1,1^3$.
7. a) Transformați din baza 10 în baza 2 numerele: 29, 31, 47 și 135.

b) Transformați din baza 2 în baza 10 numerele: $1101_{(2)}$, $10111_{(2)}$, $1011101_{(2)}$ și $11100101_{(2)}$.

8. Determinați cifrele x și y , știind că $2,xy + 7,yx = 9,99$.

9. Diferența a două numere naturale este 48. Împărțind numărul mai mare la cel mai mic, se obține câtul 3 și restul 2. Aflați numerele.

10. Suma a două numere este 18,4, iar diferența lor este 1,6. Calculați numerele.

11. Într-un bloc sunt apartamente cu 2 camere și apartamente cu 3 camere, în total 20 de apartamente și 45 de camere. Calculați câte apartamente sunt cu 2 camere și câte apartamente sunt cu 3 camere.

12. Ionuț s-a gândit la un număr, din care a scăzut 50. Rezultatul obținut l-a împărțit la 50. A mărit numărul obținut cu 1 și noul rezultat l-a mărit de 10 ori, obținând numărul 100. La ce număr s-a gândit Ionuț?

13. Patru robinete, care au același debit, curg împreună și umplu cu apă un rezervor în 6 ore. Aflați în câte ore pot umple același rezervor 3 robinete cu același debit.

14. Pentru două stilouri și trei pixuri, Ileana a plătit 97,50 de lei. Pentru un stilou și șase pixuri de același fel cu cele cumpărate de Ileana, Tudor a plătit 82,50 de lei. Calculați cât costă un stilou și cât costă un pix.

15. Din cei 28 de elevi ai unei clase, 18 participă la o activitate de ecologizare a spațiului verde, iar 22 participă la o activitate de confecționare a măștișoarelor din materiale reciclabile. Știind că fiecare elev participă la cel puțin una dintre cele două activități, calculați câți elevi participă:

- a) la ambele activități;
- b) numai la ecologizare;
- c) numai la confecționarea măștișoarelor.

16. Un dreptunghi are aria egală cu 27 m^2 și lățimea egală cu $0,3$ din lungimea sa. Aflați perimetrul dreptunghiului.

17. Dimensiunile unui paralelipiped dreptunghic sunt exprimate prin numere naturale pare consecutive. Știind că suma tuturor muchiilor paralelipipedului dreptunghic este egală cu 96 cm, calculați volumul paralelipipedului dreptunghic.

18. Aproximați numărul 143073 prin adaos și apoi prin lipsă la:

- a) zeci;
- b) sute;
- c) zeci de mii.

19. Rotunjiți numărul 814526 la:

- a) sute;
- b) mii;
- c) zeci de mii.

20. Calculați:

- a) $24^\circ 17' + 17^\circ 24'$;
- b) $65^\circ 14' - 15^\circ 7'$;
- c) $21^\circ 11' \cdot 5$;
- d) $60^\circ 45' : 5$;
- e) $43^\circ 24' + 17^\circ 53'$;
- f) $74^\circ 10' - 24^\circ 25'$;
- g) $11^\circ 17' \cdot 7$;
- h) $53^\circ 12' : 4$;
- i) $84^\circ 36' : 6 + 6^\circ 7' \cdot 9$.

21. a) Suma a două numere prime este 30. Determinați cele două numere.

b) Diferența a două numere prime este 20. Determinați cele două numere, știind că sunt mai mici decât 50.

c) Determinați numerele prime a și b , știind că $5a + 3b = 19$.

22. Aflați câte numere de forma:

- a) $\overline{x1yz}$ sunt divizibile cu 2;
- b) $\overline{ab2c}$ sunt divizibile cu 5.

23. a) Scrieți cu cifre romane numerele: 2024, 1917, 2137.

b) Scrieți cu cifre arabe numerele: CXXIV, MCCXLIX, MDCCL.

24. Aflați $a + b + c$, știind că:

a) $\overline{ab} + \overline{bc} + \overline{ca} = 55$;

b) $\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab} = 555$.

25. Notele obținute de elevii unei clase la o evaluare sunt redată în tabelul de frecvență intitulat „Nota la evaluare”.

Nota	4	5	6	7	8	9	10
Frecvența notei	1	2	4	6	5	4	3
Frecvență procentuală							

a) Completați tabelul cu frecvența procentuală a notelor.

b) Calculați media clasei la această evaluare.

c) Realizați o diagramă cu bare orizontale și una cu bare verticale, care să redea rezultatele evaluării.

26. Fie o semidreaptă AB . În semiplane diferite determinate de dreapta AB , se construiesc unghiurile BAC și DAB . Calculați măsura unghiului DAC , știind că:

a) $\angle BAC = 47^\circ$ și $\angle BAD = 63^\circ$;

b) $\angle BAC = 52^\circ 37'$ și $\angle BAD = 70^\circ 46'$.

27. Aflați numărul natural n care verifică egalitățile:

a) $2^n + 2^{n+1} + 2^{n+2} = 448$;

b) $2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n = 2^{101} - 2$;

c) $3^n + 3^{n+1} + 3^{n+2} = 1053$;

d) $3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^n = \frac{1}{2}(3^{101} - 3)$.

28. Mihai are suma de 315 lei în bancnote de 10 lei și de 5 lei.

a) Este posibil ca Mihai să aibă 10 bancnote de 5 lei? Justificați răspunsul dat.

b) Dacă Mihai are în total 36 de bancnote, aflați numărul bancnotelor de 10 lei și ce procent din numărul bancnotelor de 10 lei reprezintă numărul bancnotelor de 5 lei.

29. Un unghi XOY are măsura egală cu 60% din măsura unui unghi alungit. Se consideră un punct M , exterior unghiului XOY , astfel încât $\angle MOY = 0,6 \cdot \angle XOY$. Un punct N este interior unghiului XOY , astfel încât $\angle YON = 36^\circ$.

a) Calculați măsura unghiului XOY .

b) Arătați că punctele X , O și M sunt puncte coliniare.

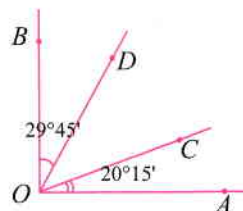
c) Arătați că unghiurile XON și MOY sunt congruente.

30. În figura alăturată, $\angle AOB$ este unghi drept, $\angle AOC = 20^\circ 15'$ și $\angle BOD = 29^\circ 45'$.

a) Calculați măsura unghiului COD .

b) Dacă OM este axa de simetrie a unghiului AOB , calculați măsurile unghiurilor DOM și COM .

c) Dacă ON este axa de simetrie a unghiului COD , calculați măsurile unghiurilor AON și BON .



2. Recapitulare și sistematizare prin teste

• Se acordă 1 punct din oficiu. Timp de lucru 50 de minute.

TESTUL 1

- I. Completați spațiile punctate cu răspunsul corect. (2 puncte)**
- (0,5p) 1. Numărul cu $(2^2)^3$ mai mic decât 179 este
- (0,5p) 2. Suma numerelor naturale care împărțite la 3 dau câtul 6 este egală cu
- (0,5p) 3. Camelia a cumpărat 3 stilouri și 5 creioane, pentru care a plătit 70 de lei. Ionuț a cumpărat 5 stilouri și 3 creioane de același fel, pentru care a plătit 106 lei. Un stilou a costat
- (0,5p) 4. Lățimea unui dreptunghi reprezintă 75% din lungimea dreptunghiului. Dacă lungimea dreptunghiului este de 20 m, atunci perimetrul dreptunghiului este de
- II. Încercuiți litera corespunzătoare răspunsului corect. (2 puncte)**
- (0,5p) 1. Rezultatul calculului $2^3 - 5^0 + 187 : 17$ este egal cu:
A. 14; B. 18; C. 19; D. 20.
- (0,5p) 2. Media aritmetică a numerelor 3,75 și 4,25 este egală cu:
A. 3,90; B. 4; C. 4,05; D. 4,10.
- (0,5p) 3. Frația $\frac{32}{2^n}$ este echiunitară pentru n egal cu:
A. 16; B. 8; C. 5; D. 7.
- (0,5p) 4. Dintre fracțiile zecimale 2,2(3), 2,(23), 2,22 și 2,23 cea mai mare este fracția:
A. 2,(23); B. 2,23; C. 2,2(3); D. 2,22.
- III. Uniți, prin săgeți, fiecare enunț aflat în coloana din stânga cu răspunsul corespunzător aflat în coloana din dreapta. (2 puncte)**
Desenați șase puncte distincte două câte două.
- | | A | B |
|--|---|--------|
| (0,5p) 1. Cel mai mare număr de drepte care se pot obține unind punctele date două câte două este egal cu ... | | a) 6; |
| (0,5p) 2. Cel mai mic număr de drepte care se pot obține unind punctele date două câte două este egal cu ... | | b) 10; |
| (0,5p) 3. Dacă exact cinci dintre puncte sunt coliniare, atunci numărul dreptelor care se obțin unind punctele date două câte două este egal cu ... | | c) 8; |
| (0,5p) 4. Dacă exact patru dintre puncte sunt coliniare, atunci numărul dreptelor care se pot obține unind punctele date două câte două este egal cu ... | | d) 1; |
| | | e) 15. |
- IV. Scrieți rezolvările complete. (3 puncte)**
- (1p) 1. Împărțind numărul natural nenul a la numărul natural nenul b , se obțin câtul 2 și restul 7. Arătați că numărul $4a - 8b - 1$ este cubul unui număr natural.
- (1p) 2. Calculați $2,3 + \{5 + 0,1 \cdot [100 \cdot 0,01 + 5,2 \cdot (17 - 1,2 : 0,1)]\}$.
- (1p) 3. Scrieți toate numerele de forma $\overline{7xy}$ divizibile cu 5, știind că $x = y + 1$.

Capitolul

Mulțimi. Mulțimea numerelor naturale

PP Competențe generale. Competențe specifice. Exemple de activități de învățare

1. Identificarea unor date, mărimi și relații matematice, în contextul în care acestea apar

1.1. Identificarea unor noțiuni specifice mulțimilor și relației de divizibilitate în $\mathbb{N}$

- Recunoașterea unor mulțimi finite sau infinite (mulțimea numerelor naturale, mulțimea numerelor naturale pare/impare, mulțimea cifrelor unui număr, mulțimea divizorilor/multiplilor unui număr natural)
- Definirea unor mulțimi folosind diagrame și/sau enumerare de elemente
- Recunoașterea unor numere prime
- Identificarea, dintr-o mulțime de numere, a unui număr compus
- Identificarea unui divizor al unui număr dat
- Scrierea unui număr natural de două cifre ca produs de puteri de numere prime, prin observare directă
- Scrierea mulțimii divizorilor unui număr natural folosind descompunerea în produs de numere prime
- Recunoașterea unor perechi de numere prime între ele

2. Prelucrarea unor date matematice de tip cantitativ, calitativ, structural, cuprinse în diverse surse informaționale

2.1. Evidențierea în exemple a relațiilor de apartenență, de incluziune, de egalitate și a criteriilor de divizibilitate cu 2, 5, 10^n , 3 și 9 în $\mathbb{N}$

- Recunoașterea și exemplificarea de elemente care aparțin/nu aparțin unei mulțimi date prin diagrame sau prin enumerarea elementelor
- Recunoașterea și exemplificarea de mulțimi date prin diagrame sau prin enumerarea elementelor; mulțimi care sunt sau nu în relație de incluziune
- Identificarea unor numere naturale care se divid cu 2, 5, 10^n , 3 sau 9, utilizând criteriile de divizibilitate
- Scrierea unui număr natural ca produs de puteri de numere prime folosind descompunerea în factori primi
- Selectarea dintr-o enumerare dată a numerelor naturale prime/compușe

3. Utilizarea conceptelor și a algoritmilor specifici în diverse contexte matematice

3.1. Utilizarea unor modalități adecvate de reprezentare a mulțimilor și de determinare a c.m.m.d.c. și a c.m.m.m.c.

- Reprezentarea unor mulțimi prin diagrame și/sau prin enumerarea elementelor
- Efectuarea de operații cu mulțimi (reuniunea, intersecția, diferența) punând accentul pe exemple practice

- Determinarea c.m.m.d.c./c.m.m.m.c. prin descompunerea numerelor naturale în produs de puteri de numere prime
- Verificarea, prin exemple, a proprietății $(a, b) \cdot [a, b] = a \cdot b$, unde a și b sunt numere naturale (de exemplu, calcularea c.m.m.m.c. pentru numere prime între ele)
- Utilizarea unor exemple pentru deducerea unor proprietăți ale relației de divizibilitate în mulțimea numerelor naturale

4. Expriarea în limbajul specific matematicii a informațiilor, a concluziilor și a demersurilor de rezolvare pentru o situație dată

4.1. Expriarea în limbaj matematic a unor situații concrete care se pot descrie utilizând mulțimile și divizibilitatea în $\mathbb{N}$

- Expriarea în limbaj matematic a unor caracteristici ale elementelor unor mulțimi finite (de exemplu, mulțimea cifrelor pare)
- Formularea unor enunțuri simple folosind cuvintele „și”, „sau”, „nu” în contextul operațiilor cu mulțimi
- Utilizarea terminologiei specifice divizibilității
- Redactarea rezolvării unor probleme referitoare la relația de divizibilitate în $\mathbb{N}$

5. Analizarea caracteristicilor matematice ale unei situații date

5.1. Analizarea unor situații date în contextul mulțimilor și al divizibilității în $\mathbb{N}$

- Asocierea „unu la unu” a elementelor a două mulțimi finite care au același cardinal
- Estimarea cardinalului unei mulțimi în contexte practic-aplicative (de exemplu: numărul elevilor școlii, numărul notelor obținute de un elev într-un semestru, numărul orașelor unui județ)
- Analizarea și compararea unor metode diferite de rezolvare a unei probleme de divizibilitate
- Aplicarea proprietăților divizibilității în $\mathbb{N}$ pentru rezolvarea exercițiilor cu fracții

6. Modelarea matematică a unei situații date, prin integrarea achizițiilor din diferite domenii

6.1. Transpunerea, în limbaj matematic, a unor situații date utilizând mulțimi, operații cu mulțimi și divizibilitatea în $\mathbb{N}$

- Deducerea unor consecințe imediate care decurg din analizarea unui set de date asociate mulțimilor (de exemplu, în general $A \setminus B$ este diferită de $B \setminus A$)
- Interpretarea unor situații practice sau interdisciplinare (de exemplu, numeral cardinal/ordinal) folosind limbajul specific mulțimilor și operațiilor cu mulțimi
- Interpretarea unor noțiuni de bază din geometrie (punct, segment, semidreaptă, dreaptă; poziții relative: punct-dreaptă, dreaptă-dreaptă) utilizând limbajul specific mulțimilor

1. Mulțimi: descriere, notații, reprezentări.

Relația dintre un element și o mulțime.

Mulțimi numerice și mulțimi nenumerice



• **Mulțimea** este o colecție de obiecte bine determinate și distincte numite **elementele mulțimii**. Mulțimile se notează, de regulă, cu litere mari: $A, B, C, \dots$, iar elementele mulțimilor se notează cu litere mici, cu numere, cu anumite simboluri.

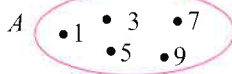
• Mulțimile pot fi definite în trei moduri:

1. Enumerând toate elementele mulțimii între acolade

Exemplu: $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$.

2. Enumerând toate elementele mulțimii în interiorul unei linii curbe închise, numită diagramă Venn-Euler

Exemplu:



3. Enunțând o proprietate caracteristică elementelor mulțimii (proprietate pe care o are oricare element al mulțimii și nu o are niciun alt element care nu se află în mulțime)

Exemplu: $A = \{x \mid x \text{ este o cifră impară}\}$.

Citim: *mulțimea A este mulțimea tuturor elementelor x, cu proprietatea că x este cifră impară.*

• Dacă A este o mulțime și x un element al său, atunci vom scrie $x \in A$ și vom citi x aparține mulțimii A . Dacă x nu este element al mulțimii A , atunci vom scrie $x \notin A$ și vom citi x nu aparține mulțimii A .

Exemplu: Dacă $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, atunci $1 \in A, 3 \in A, 5 \in A, 7 \in A, 9 \in A$ și $0 \notin A, 2 \notin A, 6 \notin A, 11 \notin A$.

Observație: Într-o mulțime fiecare element este scris o singură dată.

Exemplu: Mulțimea literelor din care este alcătuit cuvântul *matematica* este:

$$M = \{m, a, t, e, i, c\}.$$

• Mulțimea care nu are niciun element se numește **mulțimea vidă** și se notează cu simbolul $\emptyset$.

Exemplu: Mulțimea consoanelor din cuvântul *eu*.

• Mulțimea care are ca elemente toate numerele naturale este numită **mulțimea numerelor naturale** și se notează cu $\mathbb{N}$. Scriem:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots, n-1, n, n+1, \dots\}.$$

• Mulțimea numerelor naturale diferite de zero se numește **mulțimea numerelor naturale nenule** și se notează cu $\mathbb{N}^*$. Scriem:

$$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots, n-1, n, n+1, \dots\}.$$

• Dacă toate elementele unei mulțimi sunt numere, atunci mulțimea se numește **mulțime numerică**.

Exemplu: $C = \{2, 7, 11\}$. Mulțimea C are ca elemente doar numere, $2 \in C, 7 \in C, 11 \in C$, și astfel mulțimea C este o mulțime numerică.

• Dacă o mulțime conține cel puțin un element care nu este număr, atunci mulțimea se numește **mulțime nenumerică**.

Exemplu: $D = \{m, a, t, e\}$. Mulțimea D conține literele din care este alcătuit cuvântul *mate*. Mulțimea D este o mulțime nenumerică.

• O mulțime care are n elemente, unde n este un număr natural, se numește **mulțime finită**. Numărul de elemente ale unei mulțimi M se numește **cardinalul mulțimii M** și se notează **card M** .

Exemple:

- Mulțimea vidă ($\emptyset$) este o mulțime finită și notăm $\text{card } \emptyset = 0$.
- Mulțimea $E = \{0, 4, 7, 15\}$ este o mulțime finită și notăm $\text{card } E = 4$.

• O mulțime care nu are un număr finit de elemente se numește **mulțime infinită**.

Exemple:

- Mulțimea numerelor naturale și mulțimea numerelor naturale nenule sunt mulțimi infinite.
- Dreapta, semidreapta, segmentul, considerate ca mulțimi de puncte, sunt mulțimi infinite.

● ● ● activități de învățare ● ● ●

PE Înțelegere *

1. Scrieți mulțimea literelor din care este format cuvântul:
 - a) *biblioteca*;
 - b) *cinematecă*;
 - c) *actualități*.
2. Scrieți mulțimea cifrelor din care sunt formate numerele:
 - a) 43257;
 - b) 524123;
 - c) 17230415;
 - d) 425730.
3. Scrieți mulțimea numerelor naturale:
 - a) mai mici sau egale cu 4;
 - b) cuprinse între 6 și 14.
4. Scrieți mulțimea cifrelor:
 - a) pare;
 - b) impare.
5. Fie mulțimile: $A = \{1, 3, 4, 7\}$ și $B = \{2, 4, 7, 9\}$. Scrieți valoarea de adevăr a propozițiilor:
 - a) $2 \in A$;
 - b) $3 \notin A$;
 - c) $2 \notin B$;
 - d) $1^{2005} \in A$;
 - e) $4 \in A$ și $4 \in B$;
 - f) $1 \in A$ sau $7 \in B$.
6. Scrieți următoarele mulțimi cu ajutorul unei proprietăți caracteristice a elementelor: $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $D = \{1, 3, 9, 27, 81, 243\}$.
7. Precizați valoarea de adevăr a propozițiilor:
 - a) $3 \in \{0, 1, 3\}$;
 - b) $2 \notin \{1, 4, 5\}$;
 - c) $4 \in \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 5\}$;
 - d) $0 \in \emptyset$;
 - e) $2^{21} \in \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 3^{14}\}$;
 - f) $10 \in \{x \in \mathbb{N} \mid 7 \leq x < 12\}$.
8. Indicați propozițiile false:
 - a) $2 \in \{1, 7, 3\}$;
 - b) $7^0 \in \{1, 3, 9\}$;
 - c) $4 \notin \{1, 2, 3\}$;
 - d) $7 \notin \{0, 3, 7, 11\}$;
 - e) $0 \in \emptyset$;
 - f) $0 \notin \emptyset$.
9. Scrieți următoarele mulțimi, enumerând elementele acestora:

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 4\}; \quad B = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x \leq 4\};$$

$$C = \{x \in \mathbb{N} \mid 3 \leq x < 7\}; \quad D = \{x \in \mathbb{N} \mid 4 < x \leq 10\}.$$

10. Fie $A = \{0, 1, 3\}$ și $B = \{x \mid x = 2^a + a \text{ și } a \in A\}$. Scrieți elementele mulțimii B și precizați cardinalul mulțimii B .

11. Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

- a) $\{1, 2, 3\} = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x + 2 \leq 5\}$; b) $\{x \in \mathbb{N} \mid 2^x - 2^0 = 63\} = \{6\}$;
c) $\{1, 3, 5, 7, 9\} = \{x \in \mathbb{N} \mid x - 1 \text{ este cifră pară}\}$.

12. Scrieți elementele mulțimilor:

$$A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x = 2k + 1, k \in \mathbb{N}, k \leq 3\}; \quad B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x = 2^k, k \in \mathbb{N}, k < 4\};$$

$$C = \{x \mid x \in \mathbb{N}^*, 2^x \leq 32\}; \quad D = \{x \mid x \in \mathbb{N}^*, x^3 \leq 64\}.$$

13. Aflați cardinalul mulțimilor:

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 2025\}; \quad B = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x \leq 1957\}; \quad C = \{x \in \mathbb{N} \mid 4 \leq x \leq 10\};$$

$$D = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 < x < 7\}; \quad E = \{x \in \mathbb{N} \mid 5 < x \leq 14\}; \quad F = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 \leq x < 2026\}.$$

14. Scrieți elementele mulțimilor:

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid 3^x = 1 \text{ sau } 3^x = 27\}; \quad B = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 2^n, n \in \mathbb{N}^*, n \leq 5\};$$

$$C = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 < 12 \text{ și } x^2 \geq 9\}; \quad D = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ este ultima cifră a lui } n^2, n \in \mathbb{N}\}.$$

15. Determinați elementele mulțimilor:

$$A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x + 3 < 7\}; \quad B = \{x \mid x \in \mathbb{N}^*, 2^3 - 5 > x \text{ și } x \leq 3^3 - 2\};$$

$$C = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \text{ este pătrat perfect de două cifre}\}; \quad D = \{\overline{2x} \mid x \text{ este cifră impară}\};$$

$$E = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \text{ este pătrat perfect și } x \text{ are ultima cifră } 3\}; \quad F = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ și } 2^{x+1} = 32\}.$$

PE **Aprofundare și performanță** ***

16. Determinați elementele mulțimilor:

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid 8^x + 8^{x+1} \text{ este pătrat perfect}\}; \quad B = \{x \in \mathbb{N} \mid 24^x + 24^{x+1} \text{ este pătrat perfect}\}.$$

17. Scrieți elementele mulțimilor de mai jos. Ce observați?

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid 7 \leq x \leq 11\}; \quad B = \{x \in \mathbb{N} \mid 5 \leq x - 2 \leq 9\}; \quad C = \{x \in \mathbb{N} \mid 13 \leq 2x - 1 \leq 21\}.$$

18. Determinați mulțimile: $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x = \overline{2ab} \text{ și } x \text{ pătrat perfect}\};$

$$B = \{x \in \mathbb{N} \mid x = \overline{1ab} \text{ și } x \text{ pătrat perfect}\}; \quad C = \{x \in \mathbb{N}^* \mid (1 + 2 \cdot 2^2 \cdot 2^{49}) : (1 + 2^{52}) \geq x\}.$$

PE-PP **Supermate** ****

19. Determinați mulțimile A și B care îndeplinesc simultan proprietățile:

- a) $\{1, 2, 3, 4\}$ reprezintă mulțimea formată din toate elementele mulțimilor A și B ;
b) fiecare mulțime are câte două elemente;
c) dacă $x \in A$, atunci $x + 1 \in B$.

20. Se dă mulțimea A formată din numere naturale, cu proprietățile:

- a) $9 \in A$; b) dacă $x \in A$, atunci $5x + 1 \in A$; c) dacă $7x + 4 \in A$, atunci $x \in A$.
Arătați că $6 \in A$.



• Două mulțimi sunt egale dacă au aceleași elemente. Dacă A și B sunt două mulțimi egale, notăm $A = B$, iar dacă nu sunt egale, notăm $A \neq B$.

Exemplu: Fie $A = \{1, 3, 9\}$ și $B = \{3^0, 3^1, 3^2\}$ două mulțimi. Efectuând ridicările la putere, obținem $B = \{1, 3, 9\}$ și ca urmare mulțimile A și B sunt formate din aceleași elemente, deci sunt mulțimi egale. Notăm $A = B$.

Observații:

- Dacă $A = B$, atunci orice element al mulțimii A este și element al mulțimii B și orice element al mulțimii B este și element al mulțimii A .
- Dacă cel puțin un element al mulțimii A nu este element al mulțimii B sau cel puțin un element al mulțimii B nu este element al mulțimii A , atunci mulțimile A și B sunt diferite, adică $A \neq B$.
- Dacă $A = B$, atunci $\text{card } A = \text{card } B$.
- Dacă $\text{card } A = \text{card } B$, **nu** înseamnă că $A = B$. Există mulțimi diferite care au același număr de elemente.

Exemplu: Pentru $A = \{3, 10, 15\}$ și $B = \{0, 2, 3\}$, avem $A \neq B$ și $\text{card } A = \text{card } B$.

Reținem!

Proprietățile relației de egalitate

- $A = A$, oricare ar fi mulțimea A , orice mulțime este egală cu ea însăși (*reflexivitate*).
- Dacă A și B sunt două mulțimi, astfel încât $A = B$, atunci $B = A$ (*simetrie*).
- Dacă A, B și C sunt trei mulțimi, astfel încât $A = B$ și $B = C$, atunci $A = C$ (*tranzitivitate*).

• O mulțime A este **inclusă** într-o mulțime B și notăm $A \subset B$, dacă orice element al mulțimii A este și element al mulțimii B . Se mai spune că mulțimea B **include** mulțimea A și scriem $B \supset A$.

În acest caz, se spune că mulțimea A este o **submulțime** a mulțimii B .

Exemplu: Dacă $A = \{a, b\}$, $B = \{a, b, c\}$, $C = \{b, c\}$, atunci $A \subset B$ și $C \subset B$, adică mulțimile A și C sunt submulțimi ale mulțimii B .

Observații:

• **Mulțimea vidă este submulțime a oricărei mulțimi**, adică $\emptyset \subset M$, oricare ar fi mulțimea M .

• Dacă $M = \{1, 7, 77\}$, atunci submulțimile mulțimii M sunt: $\emptyset$, $\{1\}$, $\{7\}$, $\{77\}$, $\{1, 7\}$, $\{1, 77\}$, $\{7, 77\}$ și $\{1, 7, 77\}$.

Numărul submulțimilor oricărei mulțimi finite M este egal cu $2^{\text{card } M}$.

Reținem!

Proprietățile relației de incluziune

- $A \subset A$, oricare ar fi mulțimea A , orice mulțime este inclusă în ea însăși (*reflexivitate*).
- Dacă A și B sunt două mulțimi, astfel încât $A \subset B$ și $B \subset A$, atunci $A = B$ (*antisimetrie*).
- Dacă A, B și C sunt trei mulțimi, astfel încât $A \subset B$ și $B \subset C$, atunci $A \subset C$ (*tranzitivitate*).

PE **Înțelegere ***

1. Scrieți toate submulțimile mulțimilor: a) $\{1, 2\}$; b) $\{2, 3, 5\}$; c) $\{a, b, c\}$.
2. Scrieți trei submulțimi ale mulțimii numerelor naturale.
3. Scrieți toate mulțimile X care îndeplinesc condițiile: $\{1, 3\} \subset X$ și $X \subset \{1, 2, 3, 5, 7\}$.
4. Dați trei exemple de mulțimi egale cu mulțimea vidă.
5. Fie mulțimile: $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 3x \leq 10\}$ și $B = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x + 2 < 7\}$.
a) Scrieți elementele celor două mulțimi. b) Stabiliți dacă $A \subset B$ sau $B \subset A$.
6. Care dintre mulțimile de mai jos sunt egale?
 $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 3 < x < 8\}$; $B = \{4, 5, 6, 7\}$; $C = \{x \in \mathbb{N} \mid 4 \leq x \leq 7\}$;
 $D = \{x \in \mathbb{N} \mid x \geq 3, x \text{ cifră}\}$; $E = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 5, x \text{ număr par}\}$.
7. Stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:
a) $\{1, 2, 5\} \subset \{0, 1, 2, 5, 7\}$; b) $\{1, 2, 5\} \supset \{0, 1, 2, 5, 7\}$;
c) $\{3, 7, 11\} \supset \{3\}$; d) $\{x \in \mathbb{N}^* \mid x < 2\} \subset \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 2\}$;
e) $\emptyset \subset \{0\}$; f) $\{x \in \mathbb{N}^* \mid x < 5\} \subset \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ este cifră a numărului } 34021\}$.

PE **Aplicare și exersare ****

8. Fie $M = \{11, 21, 31, \dots, 91\}$.
a) Scrieți cardinalul mulțimii M .
b) Scrieți trei submulțimi ale mulțimii M formate din câte patru elemente.
c) Scrieți toate submulțimile mulțimii M formate din câte opt elemente.
9. Fie $M = \{0, 1, 7\}$.
a) Scrieți toate submulțimile mulțimii M .
b) Scrieți mulțimea X formată din submulțimile mulțimii M .
c) Scrieți cardinalul mulțimii X .
10. Fie $M = \{x \mid x \text{ este cifră pară}\}$.
a) Scrieți elementele mulțimii M .
b) Scrieți trei submulțimi care sunt incluse în M .
c) Scrieți trei mulțimi care includ mulțimea M .
11. Determinați toate valorile lui x pentru care următoarele afirmații să fie adevărate:
a) $\{x\} \subseteq \{2, 4\}$; b) $\{2, 3, x\} \subseteq \{1, 2, 3, 5\}$; c) $\{1, x, 4\} \subseteq \{1, 4, 6, 7\}$.
12. Completați spațiile punctate pentru a obține propoziții adevărate:
a) Dacă orice element al mulțimii A este element al mulțimii B , atunci $A \dots B$.
b) Dacă există în mulțimea A cel puțin un element care nu este element al mulțimii B , atunci $A \dots B$.
c) Dacă orice element al mulțimii A este element al mulțimii B și orice element al mulțimii B este element al mulțimii A , atunci $A \dots B$.
13. Fie mulțimile: $A = \{2x - 1, x, 3x + 1\}$ și $B = \{2(x + 1) - 3, 2x - 7, 2x + 8\}$. Determinați $x \in \mathbb{N}$, astfel încât $A = B$.